

河 北 工 程 大 学

二〇一八年硕士研究生入学考试试题 试卷 A

考试科目代码 611 考试科目名称 高等数学

所有答案必须写在答题纸上, 做在试题纸或草稿纸上无效。

一、选择填空 (32 分, 每空 4 分)

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = (\quad)$.
A. 1 B. 0 C. -1 D. ∞
2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 ().
A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$ B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$
C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在 D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在
3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $d\left[\int f(x)dx\right] = (\quad)$.
A. $f(x)$ B. $f(x)dx$ C. $f(x)+C$ D. $f'(x)dx$
4. 若 $y=Ce^x$ 为一微分方程的通解, 则该微分方程是 ().
A. $y'=y$ B. $y''=y$ C. $y'=-y$ D. $y''+y=0$
5. 设函数 $z=f(x,y)$, 则下列说法正确的是 ().
A. 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续, 则在该点 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在
B. 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续, 则函数必在该点可微
C. 若在点 (x,y) 处有 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 存在, 则函数必在该点可微
D. 若 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微, 则在该点 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在
6. 若函数相应于自变量增量的改变量为 $\Delta y = (2x+y)\Delta x + (\Delta x)^2$, 则下列结果不正确的是 ().
A. $dy = (2x+y)dx$ B. $y' = 2x+y$ C. $dy = 2xdx$ D. 函数在点 (x,y) 连续

7. 设 A 是一个 n 阶可逆方阵, 则下列说法不正确的是().

- A. A 的行列式不等于零
B. A 的秩为 n
C. A 的行向量组线性无关
D. A 的列向量组线性相关

8. 设有非齐次线性方程组 $Ax = b$, 则该方程组有解的条件是().

- A. A 的秩小于增广矩阵的秩
B. A 的秩大于增广矩阵的秩
C. A 的秩与增广矩阵的秩相等
D. A 的秩与增广矩阵的秩不相等

二、填空 (24 分, 每空 4 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $1 - \cos x$ 等价的无穷小量是().

2. 函数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ 的第一类可去间断点是().

3. $\int_1^2 (xe^{|x|} + \sin x + 1) dx = ().$

4. 若 D 是平面区域 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x > 0, y > 0\}$, 则 $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = ().$

5. 若 $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 3$, 则 $\begin{vmatrix} 2a & -2c \\ 2b & -2d \end{vmatrix} = ().$

6. 设 A 是三阶实对称矩阵, 特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 则 $A^{2018} = ().$

三、(10 分) 设

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ ax + b, & x \leq 0 \end{cases}$$

则 (1) 当 a, b 取何值时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导? (2) 求 $f'(x)$.

四、(10 分) 证明: 当 $x > 0$ 时, $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

五、(10 分) 试确定 a, b, c 的值, 使 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有拐点 $(1, -1)$, 且在 $x = 0$ 处有极大值 1.

六、(10 分) 求 $\int_a^b xe^{-|x|} dx (a < b)$.

七、(10 分) 设 $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. (f 有二阶连续偏导数)

八、(8 分) 计算二重积分 $\iint_D e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 为由直线 $y = x, y = 1$ 和 y 轴围成的三角区域.

九、(10分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \int_0^x \sin t dt}{(e^{x^2} - 1)\sqrt[4]{1+x^2} - 1}$.

十、(10分) 设有微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$,

- (1) 求该方程对应的齐次方程的通解;
- (2) 写出该方程的通解形式.

十一、(10分) 判断方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$$

是否有解, 若有解求其通解.

十二、(6分) 已知 n 阶方阵 A 满足矩阵方程 $A^2 - 3A - 2E = 0$, 其中 A 是给定的, E 为 n 阶单位矩阵, 证明 A 可逆, 并求 A^{-1} .